Направления подготовки:	Авионика Аэронавигация Системная инженерия
Дисциплина:	Бортовые системы управления
Курс, семестр, уч. год:	3, весенний, 2011/2012
Кафедра:	301 – СУЛА
Руководитель обучения:	ассистент Копысов Олег Эдуардович

ЛЕКЦИЯ № 15

ТЕМА: ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Понятие цифровой обработки сигналов

Цифровая обработка сигналов (ЦОС или DSP - digital signal processing) является одной из новейших и самых мощных технологий, которая активно внедрилась в широкий круг областей науки и техники: коммуникации, метеорология, радиолокация и гидролокация, медицинская визуализация изображений, цифровое аудио- и телевизионное вещание и многих других. Сегодня технология ЦОС относится к числу базовых знаний.

Цифровые сигналы формируются из аналоговых операцией дискретизации – последовательным квантованием (измерением) амплитудных значений сигнала через определенные интервалы времени Δt или любой другой независимой переменной Δx. В результате равномерной дискретизации непрерывный по аргументу сигнал переводится в упорядоченную по независимой переменной последовательность чисел. Условия, при которых возможно полное восстановление аналогового сигнала по его цифровому эквиваленту с сохранением всей исходно содержавшейся в сигнале информации, выражаются теоремами Найквиста, Котельникова, Шеннона, сущность которых практически одинакова. Для дискретизации аналогового сигнала с полным сохранением информации в его цифровом эквиваленте максимальные частоты в аналоговом сигнале должны быть не менее чем вдвое меньше, чем частота дискретизации, то есть $f_{max} \leq (1/2)f_d$, т.е. на одном периоде максимальной частоты должно быть минимум два отсчета. Если это условие нарушается, в цифровом сигнале возникает эффект маскирования (подмены) действительных частот более низкими частотами. При этом в цифровом сигнале вместо фактической регистрируется "кажущаяся" частота, а, следовательно, восстановление фактической частоты в аналоговом сигнале становится невозможным. Восстановленный сигнал будет выглядеть так, как если бы частоты, лежащие выше половины частоты дискретизации, отразились от частоты $(1/2)f_d$ в нижнюю часть спектра и наложились на частоты, уже присутствующие в этой части спектра. Этот эффект называется наложением спектров или алиасингом (aliasing).

Преобразование сигнала в цифровую форму выполняется аналого-цифровыми преобразователями (АЦП). Как правило, они используют двоичную систему счисления с определенным числом разрядов в равномерной шкале. Увеличение числа разрядов повышает точность измерений и расширяет динамический диапазон измеряемых сигналов. Потерянная из-за недостатка разрядов АЦП информация невосстановима, и существуют лишь оценки возникающей погрешности «округления» отсчетов, например, через мощность шума, порождаемого ошибкой в последнем разряде АЦП. Для этого используется понятие отношения «сигнал/шум» - отношение мощности сигнала к мощности шума (в децибелах). Наиболее часто применяются 8-, 10-, 12-, 16-, 20- и 24-х разрядные АЦП. Каждый дополнительный разряд улучшает отношение сигнал/шум на 6 децибел. Однако увеличение количества разрядов снижает скорость дискретизации и увеличивает стоимость аппаратуры. Важным аспектом является также динамический диапазон, определяемый максимальным и минимальным значением сигнала.

Цифровые фильтры обработки одномерных сигналов

Под фильтрацией будем понимать любое преобразование информации (сигналов, результатов наблюдений), при котором во входной последовательности обрабатываемых данных целенаправленно изменяются определенные соотношения (динамические или частотные) между различными компонентами этих данных.

Преобразование сигналов осуществляется в системах. Системы, избирательно меняющие форму сигналов (амплитудно-частотную и/или фазово-частотную характеристику), подавление шумов, устранение помех, извлечение из сигналов определенной информации, разделение сигналов на составляющие, и т.п. называют фильтрами. Фильтры с любым целевым назначением являются частным случаем систем преобразования сигналов.

К основным операциям фильтрации информации относят операции сглаживания, прогнозирования, дифференцирования, интегрирования и разделения сигналов, а также выделение информационных (полезных) сигналов и подавление шумов (помех). Основными методами цифровой фильтрации данных являются частотная селекция сигналов и оптимальная фильтрация.

В одномерной дискретной линейной системе связь между входом и выходом (входной и выходной дискретными последовательностями значений сигнала – отсчетами), задается линейным оператором преобразования TL:

$$y(k\Delta t) = TL\{x(k\Delta t)\}.$$

Это выражение отображает краткую запись линейного разностного уравнения:

$$\sum_{m=0}^{M} a_m\, y(k\Delta t\text{-}m\Delta t) = \sum_{n=0}^{N} b_n\, x(k\Delta t\text{-}n\Delta t), \qquad (15.1)$$

где k = 0, 1, 2, …– порядковый номер отсчетов;

Δt – интервал дискретизации сигнала;

a_m и b_n – вещественные или комплексные коэффициенты.

Положим $a_0 = 1$, что всегда может быть выполнено соответствующей нормировкой уравнения (15.1), и, принимая в дальнейшем $\Delta t = 1$, т.е. переходя к числовой нумерации цифровых последовательностей значений сигналов, приведем его к виду:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n\, x(k\text{-}n) - \sum_{m=1}^{M} a_m\, y(k\text{-}m). \qquad (15.2)$$

При k < n и m проведение фильтрации возможно только при задании начальных условий для точек x(-k), k = 1, 2, … , N, и y(-k), k = 1, 2, … , M. Как правило, в качестве начальных условий принимаются либо нулевые значения, либо выполняется продление отсчетов входных сигналов или его тренда по отрицательным значениям аргумента.

Оператор, представленный правой частью данного уравнения, получил название цифрового фильтра, а выполняемая им операция – цифровой фильтрации данных (информации, сигналов). Если хотя бы один из коэффициентов a_m или b_n зависит от переменной k, то фильтр называется параметрическим, т.е. с переменными параметрами. Ниже мы будем рассматривать фильтры с постоянными коэффициентами (инвариантные по аргументу).

Основные достоинства цифровых фильтров по сравнению с аналоговыми:

- ✓ Цифровые фильтры могут иметь параметры, реализация которых невозможна в аналоговых фильтрах, например, линейную фазовую характеристику.
- ✓ ЦФ не требуют периодического контроля и калибровки, т.к. их работоспособность не зависит от дестабилизирующих факторов внешней среды, например, температуры.
- ✓ Один фильтр может обрабатывать несколько входных каналов или сигналов.
- ✓ Входные и выходные данные можно сохранять для последующего использования.
- ✓ Точность цифровых фильтров ограничена только разрядностью отсчетов.
- ✓ Фильтры могут использоваться при очень низких частотах и в большом диапазоне частот, для чего достаточно только изменять частоту дискретизации данных.

Нерекурсивные фильтры

При нулевых значениях коэффициентов a_m уравнение (15.2) переходит в уравнение линейной дискретной свертки функции x(k) с оператором b_n:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n\, x(k-n). \qquad (15.3)$$

Значения выходных отсчетов свертки (15.3) для любого аргумента k определяются текущим и "прошлыми" значениями входных отсчетов. Такой фильтр называется нерекурсивным цифровым фильтром (НЦФ). Интервал суммирования по n получил название "окна" фильтра. Окно фильтра составляет N+1 отсчет, фильтр является односторонним каузальным, т.е. причинно обусловленным текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала, и выходной сигнал не может опережать входного. Каузальный фильтр может быть реализован физически в реальном масштабе времени.

При обработке данных на ЭВМ ограничение по каузальности снимается. В программном распоряжении фильтра могут находиться как "прошлые", так и "будущие" значения входной последовательности отсчетов относительно текущей точки вычислений k, при этом уравнение (15.3) будет иметь вид:

$$y(k) = \sum_{n=-N'}^{N} b_n\, x(k\text{-}n). \qquad (15.4)$$

При N' = N фильтр называется двусторонним симметричным. Симметричные фильтры, в отличие от односторонних фильтров, не изменяют фазы обрабатываемого сигнала.

Так как реакция НЦФ на единичный входной импульс (а равно и на любой произвольный входной сигнал) всегда конечна и ограничена размером окна фильтра, такие фильтры называют также фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры).

Техника выполнения фильтрации не отличается от техники выполнения обычной дискретной свертки двух массивов данных.

Представим, что на одной полоске бумаги выписаны по порядку сверху вниз значения данных $x(k) \equiv s_k$ (см. рис. 15.1). На второй полоске бумаги находятся записанные в обратном порядке значения коэффициентов фильтра $b_n \equiv h_n$ (обозначение h для коэффициентов операторов НЦФ является общепринятым). Для вычисления $y_k \equiv y(k)$ располагаем вторую полоску против первой таким образом, чтобы значение h_0 совпало со значением s_k, перемножаем все значения h_n с расположенными против них значениями s_{k-n}, и суммируем все результаты перемножения. Результат суммирования является выходным значением сигнала y_k. Сдвигаем окно фильтра - полоску коэффициентов h_k, на один отсчет последовательности s_k вниз (или массив s_k сдвигаем на отсчет вверх) и вычисляем аналогично следующее значение выходного сигнала, и т.д. Описанный процесс является основной операцией цифровой фильтрации, и называется сверткой в вещественной области массива данных с оператором фильтра.

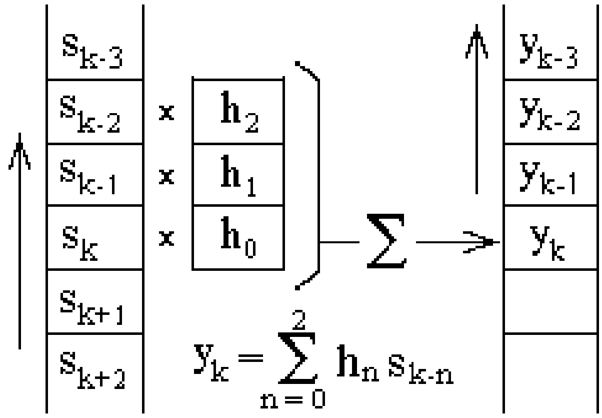


Рисунок 15.1 – Нерекурсивный ЦФ

Для математического описания наряду с формулами (15.3–15.4) применяются символические формы записи фильтрации:

$$y(k) = b(n) * x(k\text{-}n) \equiv b(n) \circledast x(k\text{-}n).$$

Сумма коэффициентов фильтра определяет коэффициент передачи (усиления) средних значений сигнала в окне фильтра и постоянной составляющей в целом по массиву данных (с учетом начальных и конечных условий). Как правило, сумма коэффициентов фильтра нормируется к 1.

Имеется целый ряд методов обработки данных, достаточно давно и широко известных, которые по существу относятся к методам цифровой фильтрации, хотя и не называются таковыми. Например, методы сглаживания отсчетов в скользящем окне постоянной длительности. Так, для линейного сглаживания данных по пяти точкам с одинаковыми весовыми коэффициентами используется формула:

$$y_k = 0.2(x_{k-2}+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}+x_{k+2}).$$

С позиций цифровой фильтрации это не что иное, как двусторонний симметричный нерекурсивный цифровой фильтр:

$$y_k = \sum_{n=-2}^{2} b_n\, x_{k-n}, \quad b_n = 0{,}2. \qquad (15.5)$$

Аналогично, при сглаживании данных методом наименьших квадратов (МНК) на основе кубического уравнения:

$$y_k = (-3x_{k-2}+12x_{k-1}+17x_k+12x_{k+1}-3x_{k+2})/35. \qquad (15.6)$$

Это также НЦФ с коэффициентами: $b_0 = 17/35$, $b_1 = b_{-1} = 12/35$, $b_2 = b_{-2} = -3/35$.

Пример. Уравнение НЦФ: $y_k = \sum_{n=-2}^{2} b_n\, x_{k-n}$, $b_n = 0{,}2$. Начальные условия – нулевые. Входной сигнал – скачок функции (ступень): x_k = {0,0,0,0,0,0,10,10,10,10,…}.

Выходной сигнал: y_k = {0,0,0,0,2,4, 6, 8,10,10,10,10,…}.

Результат фильтрации приведен на рис. 15.2(A).

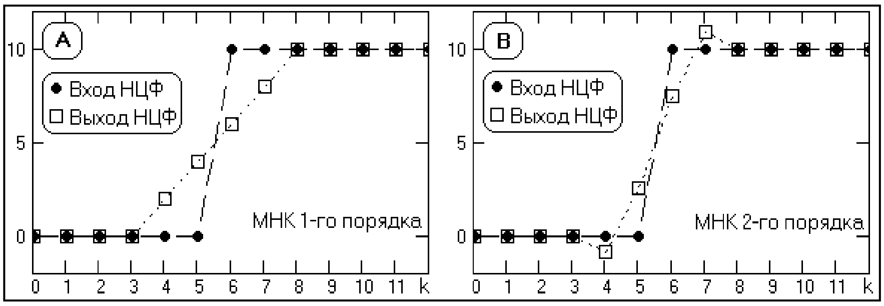


Рисунок 15.2 – Сглаживание МНК в скользящем окне по пяти точкам

Заметим: сумма коэффициентов сглаживающих НЦФ всегда должна быть равна 1, при этом сумма значений массива выходного сигнала равна сумме значений массива входного сигнала. Координатная детальность выходного сигнала ниже входного, резкие изменения входных сигналов "размазываются" по аргументу.

Проверьте результат (выполните фильтрацию, как это показано на рис. 15.1, с учетом четности фильтра).

Повторите фильтрацию фильтром МНК на основе кубического уравнения. Сравните результаты фильтрации с результатами первого НЦФ (приведены на рис. 15.2(B)).

Для операции фильтрации характерны следующие основные свойства:

- ✓ Дистрибутивность: h(n) ⊛ [a(k)+b(k)] = h(n) ⊛ a(k)+h(n) ⊛ b(k).
- ✓ Коммутативность: h(n) ⊛ a(k) ⊛ b(k) = a(k) ⊛ b(k) ⊛ h(n).
- ✓ Ассоциативность: [a(k) ⊛ b(k)] ⊛ h(n) = h(n) ⊛ a(k) ⊛ b(k).

Фильтрация однозначно определяет выходной сигнал y(k) для установленного значения входного сигнала s(k) при известном значении импульсного отклика фильтра h(n).

Рекурсивные фильтры

Фильтры, которые описываются полным разностным уравнением (15.2)

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(k-m),$$

принято называть рекурсивными цифровыми фильтрами (РЦФ), так как в вычислении текущих выходных значений участвуют не только входные данные, но и значения выходных данных фильтрации, вычисленные в предшествующих циклах расчетов. С учетом последнего фактора рекурсивные фильтры называют также фильтрами с обратной связью, положительной или отрицательной в зависимости от знака суммы коэффициентов a_m. Полное окно фильтра состоит из нерекурсивной части b_n, ограниченной в работе текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала (на ЭВМ возможно использование и “будущих” отсчетов сигнала) и рекурсивной части a_m, которая работает с "прошлыми" значениями выходного сигнала. Техника вычислений приведена на рис. 15.3.

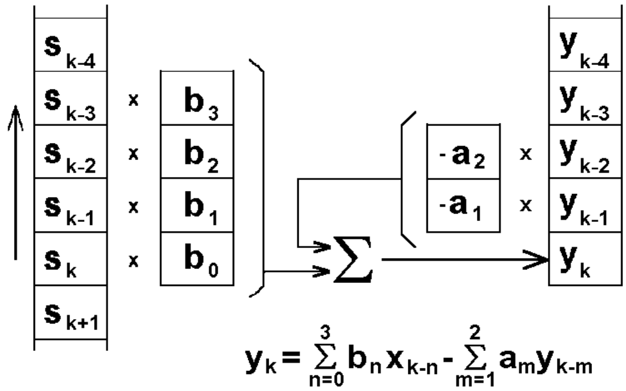


Рисунок 15.3 – Рекурсивный ЦФ

Пример. Уравнение РЦФ: $y_k = b_o x_k + a_1 y_{k-1}$, при $b_o = a_1 = 0.5$, $y_{-1} = 0$.

Входной сигнал: $x_k = \{0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1....\}$

Расчет выходного сигнала:

$y_o = 0{,}5x_o + 0{,}5y_{-1} = 0$; $y_1 = 0{,}5x_1 + 0{,}5y_o = 0$; $y_2 = 0{,}5x_2 + 0{,}5y_1 = 0.5$;

$y_3 = 0{,}5x_3 + 0{,}5y_2 = 0.25$; $y_4 = 0{,}5x_4 + 0{,}5y_3 = 0.125$; $y_5 = 0{,}5x_5 + 0{,}5y_4 = 0.0625$;

$y_6 = 0{,}5x_6 + 0{,}5y_5 = 0.03125$; и т.д.

Выходной сигнал: $y_k = \{0, 0, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125, 0.015625,...\}$

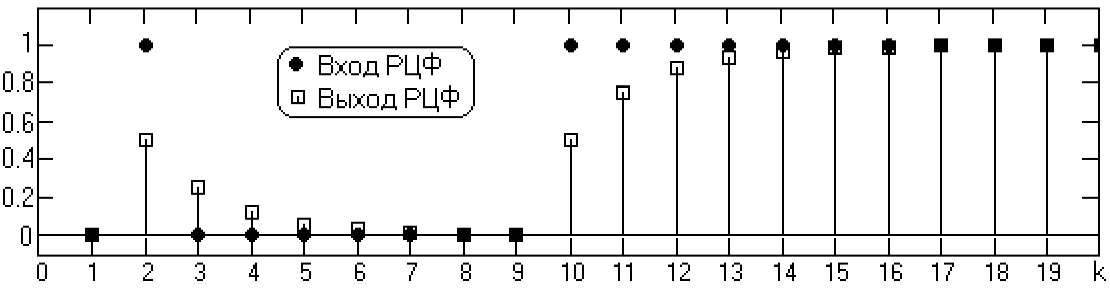


Рисунок 15.4 – Рекурсивная фильтрация

Из примера рекурсивной фильтрации на рис. 15.4 можно видеть, что реакция РЦФ на входной сигнал (например, на единичный импульс Кронекера в точке 2), в результате действия обратной связи, в принципе, может иметь бесконечную длительность (в данном случае с близкими к нулю, но не нулевыми значениями), в отличие от реакции НЦФ, которая ограничена количеством членов b_k (окном фильтра). Фильтры такого типа называют фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры). При положительной обратной связи (сумма коэффициентов a_m больше 1) фильтр становится неустойчивым (идет «в разнос» как на рис. 15.5).

Пример. Уравнение РЦФ: $y_k = b_o x_k - a_1 y_{k-1}$, при $b_o = 0.5$, $a_1=1.1$, $y_{-1} = 0$

Входной сигнал: $x_k = \{0, 10, 0, 0, 0,....\}$.

Выходной сигнал: $y_k = \{0,0,5,-5.5,6.05,-6.655,7.321,-8.053,8.858,-9.744,10.718,-11.79,\ldots$ и т.д.$\}$

Заметим: коэффициент обратной связи больше $a_1 > 1$ и выходной сигнал идет "в разнос".

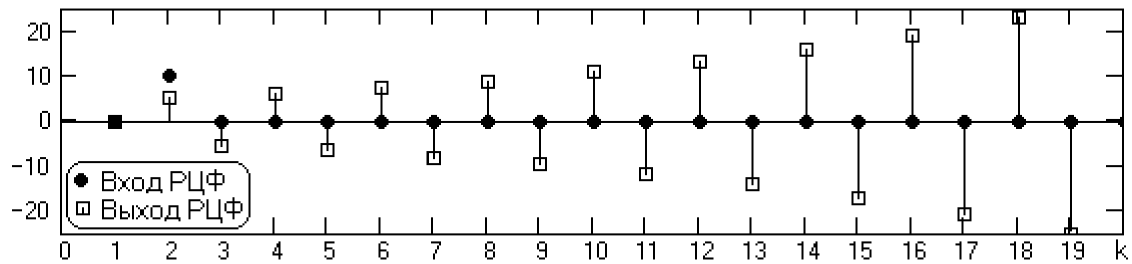


Рисунок 15.5 – Неустойчивый рекурсивный фильтр

Операции, относящиеся к рекурсивной фильтрации, также известны в обычной практике, например – интегрирование. При интегрировании по формуле трапеций:

$$y_k = (x_k+x_{k-1})/2 + y_{k-1}, \tag{15.7}$$

т.е. здесь мы имеем РЦФ с коэффициентами: $b_o = b_1 = 0.5$, $a_1 = 1$.

Пример. Уравнение РЦФ: $y_k=(x_k+x_{k-1})/2+y_{k-1}$, начальные условия – нулевые.

Входной сигнал: x_k={0,0,2,2,4,0,0,0,4,4,4,0,0,0,5,0,0,0,....}

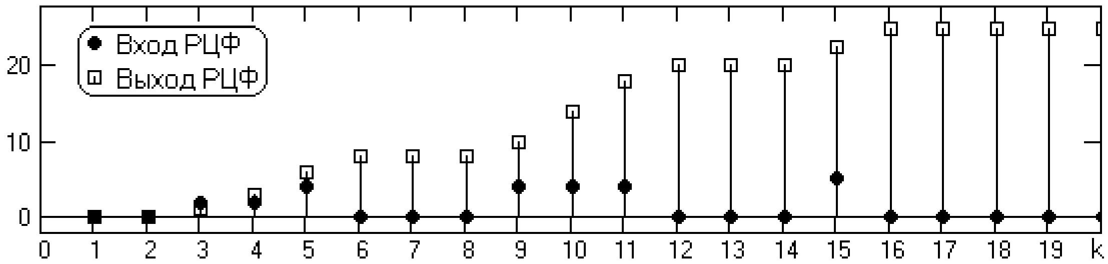
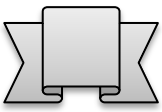


Рисунок 15.6 – Интегрирующий рекурсивный фильтр



Выполните фильтрацию для приведенного выше примера с использованием интегрирующего рекурсивного фильтра.

Контроль: y_k= {0,0,0,1,3,6,8,8,8,10,14,18,20,20,20,22.5,25,25,25...}

Передаточные функции фильтров

Удобным методом решения разностных уравнений линейных систем является z-преобразование. Применяя z-преобразование к обеим частям равенства (15.1), с учетом сдвига функций ($y(k-m) \Leftrightarrow z^m\, Y(z)$), получаем:

$$Y(z) \sum_{m=0}^{M} a_m z^m = X(z) \sum_{n=0}^{N} b_n z^n, \tag{15.8}$$

где X(z),Y(z) – соответствующие z-образы входного и выходного сигнала.

Отсюда, полагая $a_o = 1$, получаем в общей форме уравнение передаточной функции системы в z-области:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n \Big/ (1+\sum_{m=1}^{M} a_m z^m). \tag{15.9}$$

Для НЦФ, при нулевых коэффициентах a_m:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n. \tag{15.10}$$

При проектировании фильтров исходной, как правило, является частотная передаточная функция фильтра H(ω), по которой вычисляется ее Z-образ H(z) и обратным переходом в пространство сигналов определяется алгоритм обработки данных. В общей форме для выходных сигналов фильтра:

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z);$$

$$Y(z)\cdot(1+\sum_{m=1}^{M} a_m z^m) = X(z)\sum_{n=0}^{N} b_n z^n;$$

$$Y(z) = X(z)\sum_{n=0}^{N} b_n z^n - Y(z)\sum_{m=1}^{M} a_m z^m. \qquad (15.11)$$

После обратного Z-преобразования выражения (15.11):

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n\, x(k\text{-}n) - \sum_{m=1}^{M} a_m\, y(k\text{-}m). \qquad (15.12)$$

При подаче на вход фильтра импульса Кронекера δ_o, имеющего z-образ δ (z) = z^n = 1, сигнал на выходе фильтра будет представлять собой импульсную реакцию фильтра y(k) ≡ h(k), при этом:

$$H(z) = Y(z)/\ \delta\ (z) = Y(z) = TZ[y(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\, z^k, \qquad (15.13)$$

т.е. передаточная функция фильтра является z-образом его импульсной реакции. При обратном z-преобразовании передаточной функции получаем импульсную характеристику фильтра:

$$h(k) \Leftrightarrow H(z). \qquad (15.14)$$

Если функция H(z) представлена конечным степенным полиномом, что характерно для НЦФ, являющихся КИХ-фильтрами, то обратное z-преобразование осуществляется элементарно - идентификацией коэффициентов по степеням z. Передаточная функция РЦФ также может быть представлена степенным полиномом прямым делением числителя на знаменатель правой части выражения (15.9), однако результат при этом может оказаться как конечным, так и бесконечным, т.е. система может иметь либо конечную, либо бесконечную импульсную характеристику. Практически используемые рекурсивные фильтры обычно имеют бесконечную импульсную характеристику (БИХ-фильтры) при конечном числе членов алгоритма фильтрации (15.12).

Примеры.

1. Передаточная функция РЦФ: $H(z) = (1\text{-}z^5)/(1\text{-}z)$.

   Прямым делением числителя на знаменатель получаем: $H(z) = 1+z+z^2+z^3+z^4$.

   $H(z) \Leftrightarrow h(n) = \{1,1,1,1,1\}$. Фильтр РЦФ является КИХ-фильтром.

2. Передаточная функция: $H(z) = 1/(1\text{-}2z)$.

   Методом обратного z-преобразования: $h(n) = 2^n$. Фильтр РЦФ является БИХ-фильтром.

Устойчивость фильтров

Фильтр называется устойчивым, если при любых начальных условиях реакция фильтра на любое ограниченное воздействие также ограничена. Критерием устойчивости фильтра является абсолютная сходимость отсчетов его импульсного отклика:

$$\Sigma_n |h(n)| < \infty. \tag{15.15}$$

Анализ устойчивости может быть проведен по передаточной функции. В устойчивой системе значение H(z) должно быть конечным во всех точках z-плоскости, где $|z| \leq 1$, а, следовательно, передаточная функция не должна иметь особых точек (полюсов) на и внутри единичного круга на z-плоскости. Полюсы H(z) определяются корнями знаменателя передаточной функции (15.9).

Пример.

Передаточная функция фильтра рис. 15.4: $H(z) = b_0/(1\text{-}a_1z)$. При $a_1= 0.5$ полюс знаменателя: $z_p= 2$. $|z_p|>1$. Фильтр устойчив.

Передаточная функция фильтра рис. 15.5: $H(z) = b_0/(1+a_1z)$. При $a_1= 1.1$ полюс знаменателя: $z_p= -0.909$. $|z_p| < 1$. Фильтр неустойчив, что и подтверждает пример фильтрации.

Передаточная функция фильтра рис. 15.6: $H(z) = 0.5(1+z)/(1\text{-}z)$. Полюс знаменателя: $z_p= 1$. В принципе, фильтр неустойчив, но эта неустойчивость проявляется только при $k = \infty$. Импульсный отклик фильтра $h(n) = \{0.5,1,1,1, \ldots\}$, сумма которого равна

∞ только при n = ∞, т.е. при интегрировании бесконечно больших массивов. При интегрировании конечных массивов результат всегда конечен.

Приведенный критерий устойчивости относится к несократимой дроби, т.к. в противном случае возможна компенсация полюса нулем передаточной функции, и следует проверить наличие однозначных нулей и полюсов.

Проверка на устойчивость требуется только для рекурсивных цифровых фильтров (систем с обратной связью), нерекурсивные системы всегда устойчивы.

Области применения НЦФ и РЦФ обычно обуславливаются видом их передаточных функций. В принципе, нерекурсивные цифровые фильтры универсальны и способны реализовать любые практические задачи обработки сигналов. Это и понятно, т.к. реакция РЦФ на импульс Кронекера представляет собой импульсный отклик НЦФ, а, следовательно, задачи, решаемые РЦФ, могут выполняться и НЦФ, но при условии отсутствия ограничений по размерам окна фильтра. В первую очередь это касается реализации БИХ-фильтров с незатухающим или слабо затухающим импульсным откликом, например, интегрирующих или фильтров рекурсивной деконволюции. Ограничение по размерам окна является скорее не теоретическим (бесконечных операторов НЦФ не требуется), а чисто практическим. Нет смысла применять НЦФ с огромными размерами операторов и тратить машинное время, если та же задача во много раз быстрее решается рекурсивным фильтром.

Существенным преимуществом НЦФ является их устойчивость, возможность выполнения в виде двусторонних симметричных фильтров, не изменяющих фазу выходных сигналов относительно входных, и реализации строго линейных фазовых характеристик.

С другой стороны, нерекурсивные фильтры могут быть преобразованы в рекурсивные фильтры, если есть возможность z-полином передаточной функции НЦФ выразить в виде отношения двух коротких z-полиномов РЦФ типа (15.9), что может дать существенное повышение производительности вычислений. Как правило, такая возможность имеется для сходящихся степенных рядов. Отношение двух z-полиномов позволяет реализовать короткие и очень эффективные фильтры с крутыми срезами на частотных характеристиках.

Структурные схемы цифровых фильтров

Алгоритмы цифровой фильтрации сигналов (цифровых фильтров) представляются в виде структурных схем, базовые элементы которых показаны на рис. 15.7 вместе с примерами структурных схем фильтров. Как правило, структурные схемы соответствуют программной реализации фильтров на ЭВМ, но не определяют аппаратной реализации в специальных радиотехнических устройствах, которая может отличаться от программной реализации.

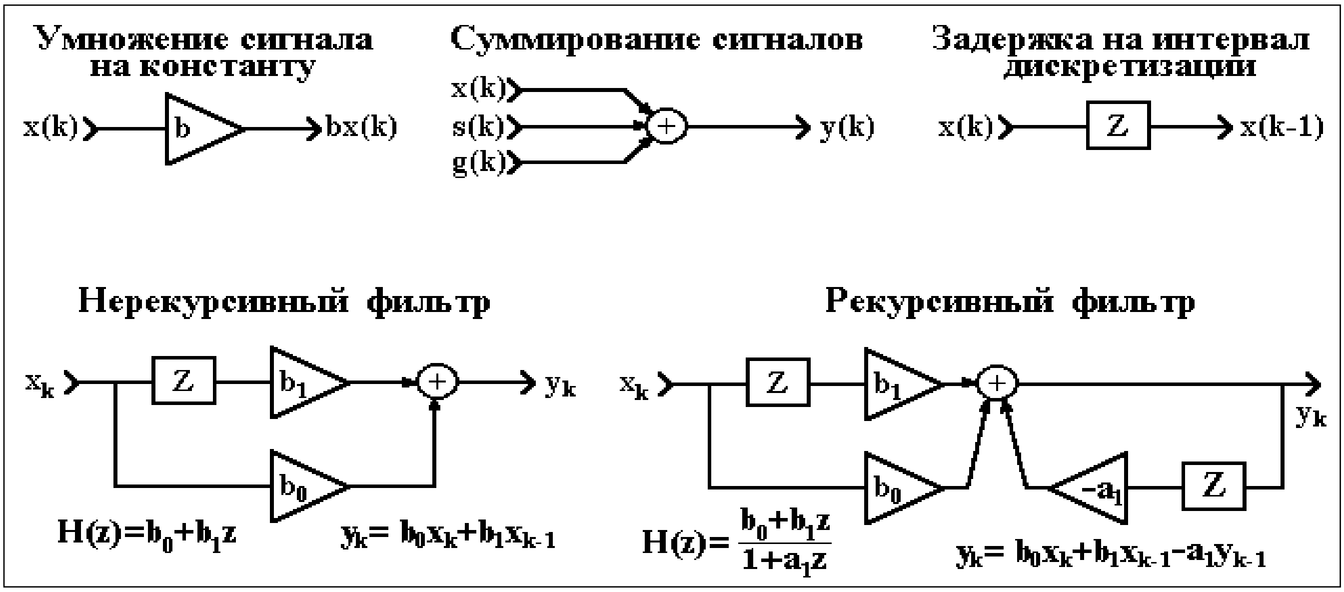


Рисунок 15.7 – Структурные схемы цифровых фильтров

Различают следующие соединения фильтров.

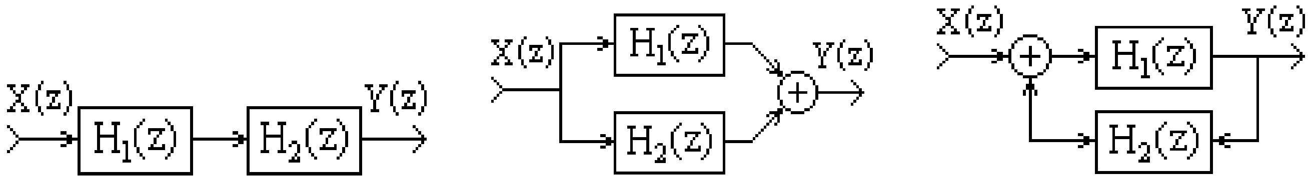


Рисунок 15.8 – Соединения фильтров

1. *Последовательное соединение* (рис. 15.8 (1)). Выходной сигнал предшествующего фильтра является входным для последующего. Эквивалентная передаточная функция общей системы равна произведению передаточных функций фильтров, в нее входящих:

$$H(z) = H_1(z)\cdot H_2(z)\cdot\ldots\cdot H_N(z).$$

2. *Параллельное соединение* (рис. 15.8 (2)). Сигнал подается на входы всех па-

раллельно соединенных фильтров одновременно, выходные сигналы фильтров суммируются. Эквивалентная передаточная функция общей системы равна сумме передаточных функций фильтров, в нее входящих:

$$H(z) = H_1(z)+H_2(z)+...+H_N(z).$$

3. *Соединение обратной связи* (рис. 15.8 (3)). Сигнал первого фильтра подается на выход системы и одновременно на вход фильтра обратной связи, выходной сигнал которого суммируется, со знаком плюс или минус в зависимости от вида связи (отрицательной или положительной), с входным сигналом системы. Эквивалентная передаточная функция системы:

$$H(z) = H_1(z)/(1\pm H_1(z)H_2(z)).$$

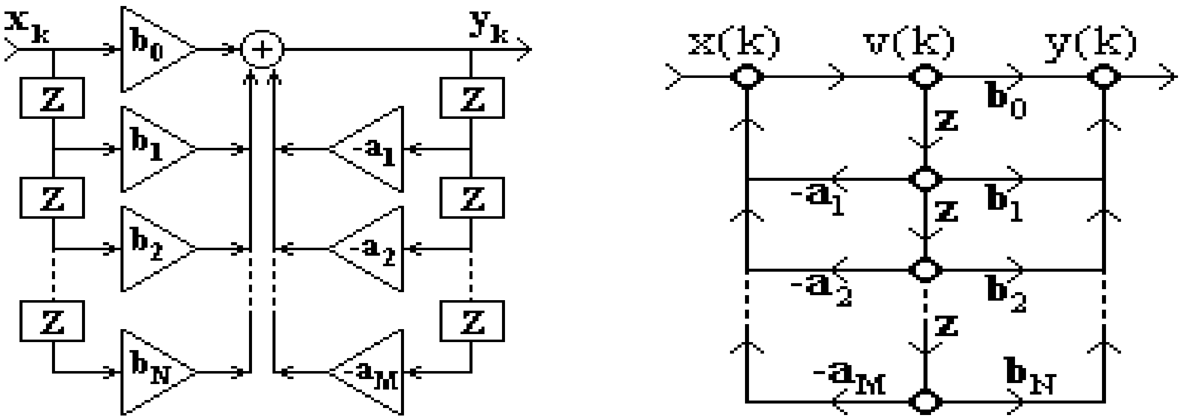


Рисунок 15.9 – Схемы фильтров

По принципам структурной реализации фильтров различают следующие схемы:

1. *Прямая форма* (рис. 15.9 (1)) реализуется непосредственно по разностному уравнению

$$y_k = \sum_{n=0}^{N} b_n x_{k-n} - \sum_{m=1}^{M} a_m y_{k-m},$$

или по передаточной функции

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n /(1+ \sum_{m=1}^{M} a_m z^m).$$

2. *Прямая каноническая форма* содержит минимальное число элементов задержки. Передаточную функцию РЦФ можно представить в следующем виде:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = H_1(z)H_2(z),$$

$$H_1(z) = V(z)/X(z) = 1/(1+\sum_{m=1}^{M} a_m z^m),$$

$$H_2(z) = Y(z)/V(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n.$$

$$v(k) = x(k) - \sum_{m=1}^{M} a_m v(k-m), \qquad (15.16)$$

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n v(k-n). \qquad (15.17)$$

В разностных уравнениях (15.16 – 15.17) осуществляется только задержка сигналов v(k). Граф реализации РЦФ в прямой канонической форме приведен на рис. 15.9 (2).

3. *Каскадная (последовательная) форма* соответствует представлению передаточной функции в виде произведения:

$$H(z) = \prod_{i=1}^{k} H_i(z).$$

$H_i(z)$ – составляющие функции вида $(1-r_iz)/(1-p_iz)$ при представлении H(z) в факторизованной форме, где r_i и p_i – нули и полюсы функции H(z). В качестве функций $H_i(z)$ обычно используются передаточные функции биквадратных блоков - фильтров второго порядка:

$$H_i(z) = (b_{0i} + b_{1i}\cdot z + b_{2i}\cdot z^2) / (1 + a_{1i}\cdot z + a_{2i}\cdot z^2).$$

4. *Параллельная форма* используется много реже, и соответствует представлению передаточной функции в виде суммы биквадратных блоков или более простых функций.

Термины для занесения в тезаурус: *цифровой сигнал, фильтрация, цифровой фильтр, нерекурсивный цифровой фильтр, рекурсивный цифровой фильтр, последовательное соединение, параллельное соединение, соединение обратной связи.*